Trimestre Septiembre-Diciembre 2007
Departamento de Cómputo Científico y Estadística
Probabilidades para Ingenieros — CO3121
Guía de ejercicios #5

Ejercicios

1. Suponga que X e Y tienen la función de probabilidad conjunta

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x=-2, y=3 \\ \frac{1}{12} & \text{si } x=-2, y=5 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x=9, y=3 \\ \frac{1}{12} & \text{si } x=9, y=5 \\ \frac{1}{3} & \text{si } x=13, y=3 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x=13, y=5 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

- Calcule $p_X(x)$para todo $x \epsilon R$.
- Calcule $p_Y(y)$para todo $y \epsilon R$.
- Determine si X e Y son o no independientes.

2. Suponga que X e Y tienen la función densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{49}(2+x+xy+4y^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

- Calcule $f_X(x)$para todo $x \epsilon R$.
- Calcule $f_Y(y)$para todo $y \epsilon R$.
- Determine si X e Y son o no independientes.

3. Para cada una de las siguientes funciones de densidad conjunta $f_{X,Y}$, calcule la función de densidad condicional $f_{Y|X}(y \mid x)$, y determine si X e Y son independientes o no.

$$a) f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2x^2y + Cy^5 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$b) f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C(xy + x^5y^5) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$c) f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C(xy + x^5y^5) & \text{si } 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$d) f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} Cx^5y^5 & \text{si } 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

4. Sean X e Y dos variables aleatorias conjunta y totalmente continuas. Suponga que $X \sim$ Exponencial(2) y que $P(Y > 5 \mid X = x) = \mathbf{e}^{-3x}$. Calcule $P(Y > 5)$.

5. Suponga que X es una variable aleatoria *constante* y que Y es una variable aleatoria cualquiera. Demuestre que X e Y deben ser independientes.

6. Sean X e Y dos variables aleatorias conjunta y totamente continuas cuya función de densidad conjunta tiene una expresión de la forma

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C_1(2x^2y + C_2y^5) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

   Determine los valores de C_1 y C_2 para los que $f_{X,Y}$ es una función densidad conjunta válida y X e Y son independientes.

7. Sean $X_1, ..., X_n$ una muestra de distribución *Exponencial*(λ). Determine las funciones densidad $f_{X_{(1)}}$ y $f_{X_{(n)}}$.

8. Suponga que la función de probabilidad conjunta de X e Y viene definida por

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{si } x = 5, y = 0 \\ \frac{1}{7} & \text{si } x = 5, y = 3 \\ \frac{1}{7} & \text{si } x = 5, y = 4 \\ \frac{3}{7} & \text{si } x = 8, y = 0 \\ \frac{1}{7} & \text{si } x = 8, y = 4 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

   Sean $Z = X + Y$, $W = X - Y$, $A = X^2 + Y^2$ y $B = 2X - 3Y^2$.

   - Calcule la función de probabilidad conjunta $p_{Z,W}(z,w)$.
   - Calcule la función de probabilidad conjunta $p_{A,B}(a,b)$.
   - Calcule la función de probabilidad conjunta $p_{Z,A}(z,a)$.
   - Calcule la función de probabilidad conjunta $p_{W,B}(w,b)$.

9. Considere que X tiene por función de probabilidad

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

y que Y tiene por función de probabilidad

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } y = 2 \\ \frac{1}{12} & \text{si } y = 5 \\ \frac{3}{4} & \text{si } y = 9 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Suponga que X e Y son independientes y que $Z = X+Y$. Calcule $p_Z(z)$ para todo $z \epsilon R$.

Respuestas

1.
- $p_X(-2) = p_{X,Y}(-2,3) + p_{X,Y}(-2,5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$
  $p_X(9) = p_{X,Y}(9,3) + p_{X,Y}(9,5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$
  $p_X(13) = p_{X,Y}(13,3) + p_{X,Y}(13,5) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
  en cualquier otro caso $p_X(x) = 0$
- $p_Y(3) = p_{X,Y}(-2,3) + p_{X,Y}(9,3) + p_{X,Y}(13,3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
  $p_Y(5) = p_{X,Y}(-2,5) + p_{X,Y}(9,5) + p_{X,Y}(13,5) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
  en cualquier otro caso $p_Y(y) = 0$
- Si, siendo $p_X(x)p_Y(y) = p_{X,Y}(x,y)$ para todo x e y.

2.
- Para $0 \leq x \leq 1$, $f_X(x) = \int_0^1 (\frac{12}{49})(2 + x + xy + 4y^2)dy = (\frac{18x}{49}) + (\frac{40}{49})$
  en otro caso $f_X(x) = 0$.
- Para $0 \leq y \leq 1$, $f_Y(y) = \int_0^1 (\frac{12}{49})(2 + x + xy + 4y^2)dx = (\frac{48y^2+6y+30}{49})$
  en otro caso $f_Y(y) = 0$.
- No. Siendo $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$

3. a) Tomando $C = 4$, así
$f_X(x) = \int_0^1 (2x^2y + 4y^5)dy = x^2 + \frac{2}{3}$
$f_Y(y) = \int_0^1 (2x^2y + 4y^5)dx = x^2 + 4y^5 + \frac{2y}{3}$.
Entonces para $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$, $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2x^2y+4y^5}{x^2+\frac{2}{3}}$
(en otro caso $f_{Y|X}(y \mid x) = 0$. Entonces, X e Y no son independientes siendo $f_{Y|X}(y \mid x)f_Y(y) \neq f_Y(y)$)

b)Aquí
$f_X(x) = \int_0^1 C(xy + x^5y^5)dy = C(\frac{x^5}{6} + \frac{x}{2})$
$f_Y(y) = \int_0^1 C(xy + x^5y^5)dx = C(\frac{y^5}{6} + \frac{y}{2})$.

Entonces para $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$,

$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{C(xy+x^5y^5)}{C(\frac{x^5}{6}+\frac{x}{2})} = \frac{(xy+x^5y^5)}{(\frac{x^5}{6}+\frac{x}{2})}$
(en otro caso $f_{Y|X}(y \mid x) = 0$).

Entonces, X e Y no son independientes siendo $f_{Y|X}(y \mid x) \neq f_Y(y)$.

c)Aquí
$f_X(x) = \int_{10}^0 C(xy + x^5y^5)dy = C(\frac{50000x^5}{3} + 50x)$
$f_Y(y) = \int_4^0 C(xy + x^5y^5)dx = C(\frac{2048y^5}{3} + 8y)$.

Entonces para $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq 10$,

$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{C(xy+x^5y^5)}{C(\frac{50000x^5}{3}+50x)} = \frac{(xy+x^5y^5)}{(\frac{50000x^5}{3}+50x)}$
(en otro caso $f_{Y|X}(y \mid x) = 0$).

Entonces, X e Y no son independientes siendo $f_{Y|X}(y \mid x) \neq f_Y(y)$.

d)Aquí
$f_X(x) = \int_0^{10} C(x^5y^5)dy = C(\frac{50000x^5}{3})$
$f_Y(y) = \int_0^4 C(xy + x^5y^5)dx = C(\frac{2048y^5}{3})$.

Entonces para $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq 10$,

$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{C(x^5y^5)}{C(\frac{50000x^5}{3})} = \frac{3y^5}{50000}$
(en otro caso $f_{Y|X}(y \mid x) = 0$).

Entonces, X e Y son independientes siendo $f_{Y|X}(y \mid x) = f_Y(y)$ para todo x e y.

4.
5. Si X=C es constante, entonces $P(X \epsilon B_1) = I_{B_1}(C)$ y $P(X \epsilon B_1, Y \epsilon B_2) = I_{B_1}(C)P(Y \epsilon B_2)$. Siendo, $P(X \epsilon B_1, Y \epsilon B_2) = P(X \epsilon B_1)P(Y \epsilon B_2)$.

6. Calculamos que $f_X(x) = C_1(x^2 + \frac{C_2}{6})$ y $f_Y(y) = C_1(C_2y^5 + \frac{2y}{3})$ con $\int_0^1 \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dxdy = C_1(\frac{C_2}{6} + \frac{1}{3})$. Entonces, se requiere que $\frac{C_2}{6} + \frac{1}{3} = 1$ y $C_1(x^2 + \frac{C_2}{6})(C_2y^5 + \frac{2y}{3}) = C_1(2x^2y + C_2y^5)$ para $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$. La segunda condición requiere que $C_2 = 0$, mientras que la primera requiere que $C_1 = 3$.
7.
8.

9. $p_Z(2) = (\frac{1}{3})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{8}$;

   $p_Z(4) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{12}$;

   $p_Z(5) = (\frac{1}{3})(\frac{1}{12}) + (\frac{1}{6})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{18}$;

   $p_Z(7) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{12}) = \frac{1}{24}$;

   $p_Z(8) = (\frac{1}{6})(\frac{1}{12}) = \frac{1}{72}$;

   $p_Z(9) = (\frac{1}{3})(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$;

   $p_Z(11) = (\frac{1}{2})(\frac{3}{4}) = \frac{3}{8}$;

   $p_Z(12) = (\frac{1}{6})(\frac{3}{4}) = \frac{1}{8}$;

   $p_Z(z) = 0$ en otro caso.